মিহির চক্রবর্তী

খেলা ভাঙার খেলা

শ্রম ও সঙ্গীতের মতোই প্রাচীন এই গণিত— অর্থাৎ মানব অস্তিত্বের এবং সভ্যতার মাপকাঠিতে। অথচ শ্রমের অপরিহার্যতা স্পষ্ট, সঙ্গীতেরও। কিন্তু গণিত? এর যে এক ধরনের চূড়ান্ত বিমূর্ততা; যে বিমূর্ততা অন্য সমস্ত বিজ্ঞান থেকে গণিতকে স্বতন্ত্র করেছে কেন তা যুগ যুগ ধরে মানুষকে টেনেছে? খানিকটা সহজেই বোঝা যায় অরণ্য-পর্বতচারী গৈনিক পর্যবেক্ষকের অপার আনন্দ ও বিস্ময়কে যখন তিনি দেখেছিলেন একটি সুপারনোভাকে বিস্ফারিত হতে। সহজেই অনুমেয় এই আশ্চর্যদর্শীর কাছে বিবরণ শোনার পরে শ্রোতাদের কেউ কেউ পরবর্তী সমস্ত জীবন কেন কাটিয়ে দেবেন আর একটি বিস্ফোরণ প্রত্যক্ষ করার আশায়। কিন্তু কেমনভাবে ব্যাখ্যা দেব যুগে যুগে কিছু কিছু মানুষ কেন তাঁদের গোটা জীবন কাটিয়ে দেবেন শুধু ইউক্লিডের পঞ্চম স্বতঃসিদ্ধটি প্রমাণিত করার প্রকল্প নিয়ে। স্বতঃসিদ্ধটির একটি পাঠ হল— একটি সরলরেখার বাইরের কোন বিন্দু থেকে ওই সরলরেখার সমান্তরাল করে ওই তলে একটিমাত্র সরলরেখাই থাকবে। এরকম একটি বক্তব্যকে ইউক্লিডের অন্যান্য স্বতঃসিদ্ধ থেকে যুক্তি দিয়ে প্রমাণিত অথবা অপ্রমাণিত করার প্রকল্প গ্রহণের কি মূল্য থাকতে পারে ব্যক্তি জীবনে অথবা সমগ্র মানবজীবনে? অথচ ঘটেছে এমনটাই। অনেক সময় মনে হয় শ্রম বা সঙ্গীতের মতো বিমূর্তিকরণের (abstraction) দিকেও মানুষের টান স্বভাবজ। 'যে কেহ মোরে দিয়েছ দুঃখ দিয়েছ তাঁর পরিচয়।' বিমূর্ততার দিকে অমোঘ আকর্ষণ এবং এই আকর্ষণজনিত দুঃখবোধ, যা ব্যক্তিমানুষকে অসম্ভব পীড়িত করতে পারে, তা মানব-জীবনের অস্তিত্বেরই পরিচয়। হয়ত বা অংশত।

বিমূর্তিকরণের পাল তুলেই তাহলে যাত্রা শুরু হোক আমাদের।

প্রথমত গণিতশাস্ত্রের বিষয়বস্তু কী? অর্থাৎ কাদের সম্পর্কে তার মাথাব্যথা? প্রায় তৎক্ষণাৎ উত্তর দিতে পারে যে কেউ— সংখ্যা জ্যামিতিক নক্সাগুলি বা এমনিতর অন্য কিছু। প্রশ্ন: এগুলির কি কোন বাস্তব অস্তিত্ব আছে? যে অর্থে একটি নক্ষত্রের বা তার গতিপথের বাস্তব অস্তিত্ব আছে বলে মনে করা হয়। আবার তৎক্ষণাৎ উত্তর আসবে— না। সংখ্যা, বিন্দু বা সরলরেখা অথবা বৃত্ত— এরা কোন বাস্তব জগতের অধিবাসী নয়

বরং মানুষেরই মনের সৃষ্টি এরা, অথবা এভাবে বলা হয়ত ঠিক যে গণিতবিদের মনের জগতের বাইরে কোথাও গণিতের কুশীলবদের খুঁজে পাওয়া যাবে না। কিন্তু একথা এত সহজে স্বীকার করে নেবেন না সকলে। যেমন প্লেটো। প্লেটো বলবেন গণিতের অন্তর্গত ধারণাগুলির (concept) কোথাও একটি জগত আছে— যেমনটি আছে গ্রহ, নক্ষত্র অণু পরমাণুর জগত। এই জগতটি রয়েছে মানুষের মনের বাইরে— মানবমনের অস্তিত্ব নিরপেক্ষভাবে। বিজ্ঞানী যেমন তার মনসংযোগ করে এবং শ্রমস্বীকার করে জানার চেষ্টা করেন এবং কখনো কখনো জানতেও পারেন গ্রহনক্ষত্রের ধর্ম, গণিতজ্ঞও তেমনি চেষ্টা করেন গণিত-জগতের অধিবাসীদের ধর্ম আবিষ্কার করতে, যেমন তিনি হয়ত একদিন জানতে পারলেন যে একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর আঁকা বর্গক্ষেত্র, অন্য বাহুদুটির উপর আঁকা বর্গক্ষেত্রগুলির যোগফলের সমান। এটা তাঁর আবিষ্কার, অথবা দর্শন (observation-Hardy), কিন্তু মনের সৃষ্টি নয়। গণিতবিদ কোনদিন আবিষ্কার না করলেও এই সত্য অপরিবর্তিত থেকে যাবে। সত্য আমাদের মনের বাইরে থাকে। আমি কখনো তা জানতে সক্ষম হলে নিজেকে ভাগ্যবান মনে করি। গণিতের সত্যও এর ব্যতিক্রম নয়। অন্য মতটির দিকে আবার একটু ফেরা যাক ; অর্থাৎ যে মত একথা মনে করে যে গণিতের জগত সম্পূর্ণভাবেই মানুষের সৃজন। অ্যারিস্টটল, ক্যান্ট এবং হালের ইনটুইশনিস্টদেরও মোটামুটিভাবে এই দলভুক্ত করা যেতে পারে। আমরা যেমন একটি উলের সুতো নিয়ে আপন মনে খেলা করি, এবং খেলার ছলে নানা ধরনের প্যাটার্ন ফুটিয়ে তুলি, গাণিতিক ক্রিয়াও আসলে তেমনি এক খেলা। গণিতের খেলায় যে মাতে সে প্রথমে ছোট ছোট প্যাটার্ন বানিয়ে নেয় তার ইচ্ছে মতো, এগুলি হল মূল concept, যে গুলি নিয়ে আবার গেঁথে গেঁথে (অবশ্যই সুচারুভাবে) তৈরি হবে আরো অনেক প্যাটার্ন অথবা গণিতের অবয়ব। এই অবয়ব সম্পূর্ণই গড়ে তোলা, এবং এই গড়ে তোলার আগে পর্যন্ত কোন অস্তিত্বই তার ছিল না। গণিতের কারিগরের মনের বাইরে আছে এমন কোন কিছুর ছায়া বা প্রতিরূপ যদি এই অবয়বে এসে ধরা পড়ে যায় তা হবে একান্তই বাড়তি পাওনা।

প্রথমোক্ত মতে গাণিতবিদের ভূমিকা হচ্ছে, আবিষ্কারকের আর দ্বিতীয় মতানুযায়ী তা হল কারিগর বা শিল্পীর। গণিতের আবিষ্কারক আর গণিতের কারিগর। কিন্তু দু'দলের কোন দলই মনে করে না যে গণিতের মূল ধারণাগুলি, যেমন সংখ্যা, জ্যামিতিক চিত্রমালা অথবা সেট, বাস্তব জগতে কোথাও খুঁজে পাওয়া যাবে। একদল বলছেন যে এদের জগত বাস্তব জগত নয়, এরা আছে তবে অন্য কোথাও অন্য কোনখানে। 'The 'creation' of a consistent coherent concept in the human mind is actually the uncovering or discovering of a permanently and independently existing real abstract idea'. আর একদল বলছেন সে জগত কোথাও নেই। গণিতের ছাত্রকে আপন হৃদয় ও মননের পালমাটি দিয়ে একটু একটু করে তা গড়ে তুলতে হবে।

ব্যবহার যোগ্যতার কথা এসে পড়ে এই প্রসঙ্গে। গণিত তো ব্যবহৃত হয়ে আসছে বিজ্ঞান, প্রযুক্তি বাণিজ্যে সেই ঊষাকাল থেকেই। বর্তমানে সেই ব্যবহারের ক্ষেত্র সম্প্রসারিত হয়েছে অর্থনীতি, সমাজবিজ্ঞানেও— বস্তুত কোথায় নয়। থিওরিটিকাল ফিজিক্স-এর গবেষণা-প্রবন্ধগুলি আজকাল এমন চেহারা নিচ্ছে যে সেগুলিকে পদার্থবিদ্যা বলে চেনাই যায় না বরং মনে হয় গণিতের কাছাকাছি কিছু একটা। আর সমাজবিজ্ঞানেও গণিতের ব্যবহার এত বেড়েছে যে জাতে ওঠার তাগিদে কোনো কোনো গবেষক তাঁদের প্রবন্ধে প্রয়োজনহীন গণিতচর্চাও করে থাকেন। ব্যাপারটাকে ঠাট্টা করে বলা হয় এইভাবে, 'একটু এপসিলনডেল্টার নৈবেদ্য ছিটিয়ে দিলুম আর কি।' প্রায় মধ্যযুগে ক্যালকুলাস আবিষ্কার বা সৃষ্টির পরে প্রাকৃতিক বিজ্ঞান এবং মেকানিক্স-এ একের পরে এক দিগন্ত খুলে যেতে থাকে। গণিতের এই তত্ত্বটির বিপুল ক্ষমতার দিকে তাকিয়ে সবিস্ময়ে প্রশ্ন করেছেন অনেকেই আপাত অবিশ্বাস্য এই তত্ত্ব কেন যে ম্যাজিকের মতো কাজ করছে গাণিতজগতের বাইরে! গ্রুপ থিওরির মতো চূড়ান্ত বিমূর্ত তত্ত্ব তো ফিজিক্স থেকে সমাজবিজ্ঞান সর্বত্রই আসন পেতেছে আজকে। ইউক্লিডির জ্যামিতির কথা ছেড়েই দিলাম, অ-ইউক্লিডিয় জ্যামিতিও ব্যবহৃত হয়ে গেল মহাবিশ্বের গঠন বিশ্লেষণে, গাণিতিক লজিক প্রতি পদপাতেই প্রয়োজন হচ্ছে কম্প্যুটার-এর প্রজন্ম সৃষ্টির কাজে। এছাড়াও গণিতের যুক্তিপরম্পরা সাজানোর পদ্ধতি (axiomatic-deductive method) এমন শক্তিশালী এবং সুচারু মনে হয়েছিল যে সমস্ত বিষয়ের, এমন কি নন্দনতত্ত্ব (Ethics-Spinoza)-এর উপস্থাপনাও করা হতে লাগল এই প্রথা মতো। মনে হল, প্রকৃতি, সমাজধর্ম বা মানবমনের গভীরের যে কোন তত্ত্বের যথাযথ উপস্থাপনার সর্বোৎকৃষ্ট উপায় গাণিতিক আরোহী (deductive) পদ্ধতি। তবে কি ব্যবহার যোগ্যতাই মাপকাঠি? গণিতের কোন ধারণা বা তত্ত্বের সাফল্য কি নির্ভর করবে তা কি পরিমানে অন্য ক্ষেত্রে কাজে আসে তার উপরে? মনে রাখা দরকার গণিতকে, এই সু-সেবিকার ভূমিকা পালনের জন্যই, বরণ করা হয়েছে বিজ্ঞানের 'রানী' বলে। এই অসামান্য সাফল্যের পরেও কিন্তু মন মানেনি। গত শতকের শেষভাগ থেকে ক্রমে ক্রমে গণিত নিজেকে সরিয়ে নিয়েছে কোলাহল থেকে। ঢেলে সাজিয়েছে নিজেকে; দাঁড়ানোর জমি পরীক্ষা করেছে বারবার, কখনো কখনো মুখ হয়ে থেকেছে নিজের রূপে। হার্ডির সোচ্চার ক্ষমা প্রার্থনা— আমি জীবনভর কখনো এমন কোন ফসল ফলাইনি যা কাজে লাগছে বা ভবিষ্যতে লাগতে পারে— এই বাক্যের মধ্যেই অন্যত্র ব্যবহারযোগ্যতার প্রশ্নটি সম্পর্কে এই শতকের গোড়ার দিকে যে মনোভাব প্রচলিত ছিল তা সম্পূর্ণ বলা হয়ে গেছে। Synge ১৯৪৪-এ লিখেছেন— বিজ্ঞান এক অভূতপূর্ব উত্তেজনার মধ্য দিয়ে চলেছে আজকে। শুধু এতদিনকার অতন্দ্র প্রহরীটি আর নেই। সে কিন্তু নিদ্রামগ্ন নয়, আগের মতোই পরিশ্রম করে চলেছে সে, কিন্তু তা সে করছে কেবল নিজেরই জন্য। প্রহরীটি গণিত। গণিত অর্থাৎ বিশুদ্ধ গণিত-চর্চা যাঁরা করছেন, আজও পর্যন্ত তাঁরা মূলত এই প্রবণতারই ধারাবহনকারী।

কেন এমন হল ? আমার মনে হয় গণিতের ভিতরে এবং বাইরে এমন এক পরিস্থিতি তৈরি হয়েছিল যার ফলেই এই আত্মমগ্নতার কাল সূচিত হয়। বাইরের কারণটিই প্রথমে ধরা যাক।

ক্যাপিটালিজমের হাতে হাত মিলিয়েই মানুষের জীবনে হাজির হয়েছিল specialisation। তার আগে যাঁরা জ্ঞানের পথের পথিক হতেন তাঁরা এক সমগ্রতার সন্ধান করেছেন, বিজ্ঞান-শিল্প-গণিত-দর্শন মিলেমিশে যেত তাঁদের কাজের ধারায়। এইসব 'জ্ঞানী'দের কাছে সমাজের চাহিদাও ছিল অনুরূপ। এটা ঠিক নয় যে জ্ঞানের পরিধির অসামান্য বিস্তৃতিলাভ এবং একজন ব্যক্তিমানুষের ক্ষমতার সীমাবদ্ধতার জন্যই সেই সমগ্রতার অনুসন্ধান আর কোন একক 'জ্ঞানী' ব্যক্তির পক্ষে সম্ভব হয়নি। এটা খুবই আংশিক সত্য। আসলে সমাজের কোথাও নতুন গড়ে ওঠা ক্ষমতা-কেন্দ্র চেয়েছে সমস্ত স্তরের কর্মবিভাজন, প্রত্যেক কর্মরত ব্যক্তিকে তার উদ্যোগের সীমা বেঁধে দিতে চেয়েছে এবং চেয়েছে সেই সীমারেখার মধ্যেই ব্যক্তিটি উত্তরোত্তর পারদর্শী হয়ে উঠুক আর সমগ্রতা থেকে বিচ্ছিন্ন হয়েই তৃপ্ত থাকতে শিখুক। সমগ্রতার দায় বহন করবে সেই চূড়ান্ত ক্ষমতার কেন্দ্রটি, যদি সে দায় আদৌ কাউকে বহন করতে হয়। এই কেন্দ্রনির্ভর ব্যবস্থাপনা ইতিহাসের একটি স্তরে সমাজ-বিকাশে একটা উল্লম্ফন এনে দিয়েছিল, ঘুচে গিয়েছে সামন্ততান্ত্রিক শিথিলতা। টানটান হয়ে পড়ছিল সমাজের শিরা-উপশিরা। প্রত্যেক ব্যক্তিকে খুব অল্প সময়ের মধ্যেই বুঝে বা না বুঝে তার নিজস্ব গণ্ডীটি খুঁজে নিতে হচ্ছিল এবং এটাই তার সত্তা (identity) বলে চিহ্নিত হচ্ছিল সমাজ দেহে। এই গণ্ডী খুঁজে নেওয়ার ছুটোছুটিকেই মনে হয়েছিল ব্যক্তির স্বাধীনতা। পরবর্তীকালে, সমাজ-তান্ত্রিক ব্যবস্থাপনার দর্শনেও মূলত এই প্যারাডাইমই গৃহীত হয়েছে। একটি বাড়তি সংযোজন হয়েছে তাতে। তা হল ব্যক্তিকে আর গণ্ডীটাও খুঁজে নিতে হবে না— আর এটাকেই বলা হয়েছে সামাজিক নিরাপত্তা। ব্যক্তিমানুষের আগল খুলে যাবার যে লক্ষ্য স্থির করা হয়েছিল তার সাথে শক্তিশালী কেন্দ্র-নির্ভর সুবৃহৎ ব্যবস্থাপনার প্রয়োগ তত্ত্ব হিসেবেই সঙ্গতিপূর্ণ নয়। বস্তুত এই দর্শন তখন সাধারণভাবে সমর্থিত হয় এবং গণিতের কর্মীদের ক্ষেত্রেও এর ব্যতিক্রম হয়নি। যেমন শ্রমের ক্ষেত্রে পাশের খোপের শ্রমের প্রতি অনাসক্তিই কাম্য হয়ে উঠেছে, ঠিক তেমনি গণিতের কর্মীরা ক্রমে অন্য বিভাগের ক্রিয়াকাণ্ড সম্পর্কে উদাসীন হতে থেকেছেন। তার ফলে ক্রমে একটি বিভাজনের বেড়াও গজিয়ে উঠেছে সীমান্তে, যে সীমান্ত ইতিপূর্বে কোনকালেও সেভাবে স্পষ্ট হয়ে ফুটে ওঠেনি।

এবারে আমরা এই আত্মবিচ্ছিন্নতার কারণ খুঁজব গণিতের নিজেরই অভ্যন্তরে। সতেরো, আঠারো এবং উনিশ শতকের প্রথম দিক পর্যন্ত বিজ্ঞানের অন্য সমস্ত বিভাগের মতোই গণিতের জগতেও অপর্যাপ্ত উৎপাদন হয়েছে। এই উৎপাদন খানিকটা কাঁচামাল উৎপাদনের মতো যার মূল ব্যবহারকারী নব্যবিজ্ঞান। আগেই উল্লেখ করেছি এমন

সুন্দরভাবে কাজে লেগে যাচ্ছিল সেই কাঁচামাল যে তার অন্তর্নিহিত বিভ্রান্তি নিয়ে মাথা ঘামানোর ফুরসতই পাওয়া যায়নি তখন। বিজ্ঞানের রমরমা বাজারের মুখ্য জোগানদার গণিতের তখন বড়ই সময়ের অভাব নিজের পায়ের তলার মাটির দিকে নজর দেবার। কিন্তু সে মাটিও তখন ক্ষয়ে যাচ্ছে।

গণিতজ্ঞদের মনে হতে লাগল যে concept-গুলি নিয়ে তাঁরা কথা বলে আসছেন সেগুলি যেন অস্বচ্ছ যেমন ক্যালকুলাসের limit, অথবা complex numbers অথবা irrational numbers এমনকি পূর্ণ সংখ্যার ধারণাও। তাছাড়া যেভাবে এই ধারণা-গুলির উপরে ভিত্তি করে করে গণিতের শরীরে সংযোজন হয়ে চলেছে তার যেন তেমন একটা যুক্তিনির্ভরতা নেই। এই সন্দেহের সূত্রপাত উনবিংশ শতাব্দীর প্রায় মাঝামাঝি সময়ে অ-ইউক্লিডিয় জ্যামিতি প্রস্তাবিত হবার সাথে সাথে। এই প্রস্তাবনার পরে একথা ক্রমেই স্পষ্ট হচ্ছিল যে এতদিনের পরিচিত ইউক্লিড-প্রবর্তিত জ্যামিতি যার সত্যতা সম্পর্কে বিতর্ক ছিল না, যার ব্যবহারে কোথাও কোন অসঙ্গতির সৃষ্টি হয়নি, তার মধ্যেও যথেষ্ট পরিমাণে খুঁত থেকে গেছে। তাই সূচনা হল এমন একটি পর্যায়ের যখন গণিত খুঁটিয়ে খুঁটিয়ে পরীক্ষা করতে শুরু করল তার নিজের শরীরকে। সে তার ধারণাগুলির (concept) অস্পষ্টতাকে দূর করে সুনির্দিষ্ট কথায় সুনির্দিষ্ট করে তুলতে লাগল তাদের। ধারণাগুলির এলোমেলো তাৎক্ষণিক উদ্দেশ্যে (ad-hoc) ব্যবহারের পরিবর্তে তাদের মূল গুণাবলী এবং মূল আন্তঃসম্পর্কগুলি স্বতঃসিদ্ধ বলে ঘোষিত করার কথা বলা হল। এবং তার পরে একে একে অন্য গুণাবলী এবং আন্তঃসম্পর্কগুলি যুক্তি-প্রয়োগে, সন্তর্পণে প্রমাণ করে যাবার কথা বলা হল। সন্তর্পণে, কারণ এমন কোন কিছু যেন প্রমাণের সময় ব্যবহার না করা হয়ে যায় যা স্বতঃসিদ্ধগুলির বাইরে থেকে নেওয়া। এই পদ্ধতিকে বলা হয়ে থাকে অবরোহী পদ্ধতি (deductive method); এই পদ্ধতির সবথেকে গুরুত্বপূর্ণ অংশ হল তীক্ষ্ণ অনুশাসন মেনে চলা অথবা rigor।

এই পর্ব গণিতের সামগ্রিক আত্মসমীক্ষা এবং অনেক ক্ষেত্রে ঢেলে সাজানোর পর্ব। এমন কোন গিরিয়াস গণিতবিদ ছিলেন না যিনি এই আত্মসমীক্ষায় অংশ নেননি। এবং এসময় বড় বেদনার সময়, বাইরের জগতের দিকে তাকানো নিশ্চয়ই সম্ভব এই পর্যায়ে, কিন্তু অর্থপূর্ণ দৃষ্টিপাত করা যায় না। গাণিতিক ক্রিয়াকলাপ তো মানবিক ক্রিয়া-কলাপেরই অঙ্গ।

আত্মসমীক্ষণের পথ ধরেই এই শতকের গোড়ার দিকে এসে পৌঁছন গেল এক সংকটময় সন্ধিক্ষণে। এ এমনই এক সংকট যে এর থেকে মুক্তির উপায় খুঁজে পাবার আশাও নির্মূল হতে চলল। একের পর এক বিধ্বংসী ঢেউ এসে আঘাত করল তিন হাজার বছর ধরে গড়ে তোলা সৌধের ভিত্তিভূমিকে।

প্রথম আঘাত এল প্যারাডক্সগুলি আবিষ্কারের মধ্য দিয়ে। রাসেল আবিষ্কৃত প্যারাডক্সটি নিয়ে এখানে একটু আলোচনা করব। কিছু বস্তুর সমষ্টিকে বলা হয় সেট।

যেমন পৃথিবীর অধিবাসী সমস্ত মানুষের সমষ্টি। প্রতিটি মানুষ এই সেটের উপাদান (element)। মনে করা যাক S হল সমস্ত রকম সেট-এর সমষ্টি। তাহলে S তার নিজেরই অন্তর্ভুক্ত, অর্থাৎ S নিজেরই অন্যতম উপাদান। এই জাতীয় গোলমেলে সেটগুলি বাদ দেওয়া যাক। বেশিরভাগ সেটই তার নিজের অন্তর্ভুক্ত নয়। এদের বলা হয় সাধারণ (ordinary) সেট। যেমন সমস্ত মানুষের সেটটি একজন মানুষ নয়। এখন মনে করা যাক N হচ্ছে সেইসব সেটের সমষ্টি যারা নিজের অন্তর্ভুক্ত নয়। অর্থাৎ N-এর উপাদান হল একটি সাধারণ সেট। এই নবগঠিত সেট N-কে নিয়ে সমস্যা। N নিজের অন্তর্ভুক্ত কি না। একটু চিন্তা করলেই সমস্যাটি বোঝা যাবে। N-কে যদি নিজের অন্তর্ভুক্ত ধরা হয় তাহলে দেখানো যাবে N নিজের অন্তর্ভুক্ত নয়। আবার উল্টোদিকে N যদি নিজের অন্তর্ভুক্ত না হয় তাহলে দেখানো যাবে যে N নিজের অন্তর্ভুক্ত।

Cantor-এর সেটতত্ত্ব সেই সময়ে প্রায় প্রতিষ্ঠিত হতে চলেছিল এবং এই প্রতিষ্ঠা এমনই যে আজকের গণিতের যে কোন বিভাগই এই তত্ত্বের ভাষা ও ভিত্তির উপরে গড়ে তোলা হয়। কিন্তু উপরিউক্ত প্যারাডক্সের কোন সমাধান যদি না হয় তাহলে তো সেটতত্ত্ব সম্পর্কেই প্রশ্ন জাগে, প্রশ্ন জাগে তার যুক্তিগ্রাহ্যতা সম্পর্কে।

এরকম আরো বেশ কিছু প্যারাডক্স অত্যন্ত অস্বস্তিকর ছায়া ফেলে বিরাজ করতে লাগল গণিতের পরিমণ্ডলে।

দ্বিতীয় প্রশ্ন এল গণিতের মধ্যেকার সম্ভাব্য স্ববিরোধিতা নিয়ে। আজ যা আমি গাণিতিক সত্য বলে জানছি, কি স্থিরতা আছে যে ভবিষ্যতে তা মিথ্যা বলে প্রমাণিত হয়ে যাবে না। প্রকৃতি বিজ্ঞান বা অন্যান্য ক্ষেত্রে তো এমন ঘটেই থাকে। কিন্তু গণিতের সত্যগুলি যেহেতু যুক্তিনির্ভর, তথ্যনির্ভর নয়, এমনই আশা করা স্বাভাবিক যে যুক্তি ঠিক থাকলে সত্যগুলি অপরিবর্তিত থাকবে। রাসেলের প্যারাডক্সে তো দেখা গেল N সেটটি নিজের অন্তর্গত এটি সত্য হলে যুক্তি প্রমাণ করছে যে N সেটটি নিজের অন্তর্গত নয়। এমন ঘটনা যদি জ্যামিতির ক্ষেত্রেও ঘটে, যদি কখনো আবিষ্কৃত হয় যে কোনো ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি ১৮০° থেকে কম অথবা বেশি? আমরা তো আজকে জানি যে ত্রিভুজের কোণ তিনটি যোগ করলে ১৮০° হবে। কোনো তত্ত্বের মধ্যে এই জাতীয় স্ববিরোধ তৈরি হলে স্বাভাবিকভাবেই তত্ত্বটি অর্থহীন হয়ে যায় প্রয়োগের দিক থেকে এবং তত্ত্বের অন্তর্নিহিত সামঞ্জস্য (balance) ও সৌন্দর্য (elegance) বিনষ্ট হয়। আবারও বলা যায় সমস্ত মহান গণিতবিদই এই সম্ভাব্য স্ববিরোধিতার প্রশ্নটি নিয়ে ভেবেছেন এই শতাব্দীর শুরুর দিকে। অবশ্য গণিতের জগতে নতুন নতুন তত্ত্বের আবির্ভাব বন্ধ থাকেনি এ কারণে। যাঁরা গণিতের তত্ত্ব তৈরি করছিলেন তাঁরা এই ঝুঁকি নিয়েই কাজ করে যাচ্ছিলেন যে স্ববিরোধ হঠাৎ দেখা দিতেই পারে এবং তাহলে সমস্ত প্রাসাদটাই ধসে পড়বে। তবুও Hilbert-এর মতো মহীরুহ ব্যক্তিত্ব এই আশা পোষণ করছিলেন যে অবশ্যই একদিন গণিতকে সম্পূর্ণভাবে স্ববিরোধমুক্ত বলে প্রমাণ করা

যাবে। কিন্তু চরম আঘাতটি হানলেন Gödel। তিনি প্রমাণ করে দিলেন একথা কখনোই প্রমাণ অথবা অপ্রমাণ করা যাবে না যে সংখ্যাতত্ত্ব (Number Theory) স্ববিরোধমুক্ত। আঘাতটি চরম, কারণ সংখ্যাতত্ত্ব প্রায় সমস্ত গণিতেরই গোড়ায়। এই তত্ত্বই যদি স্ববিরোধমুক্ত বলে নিশ্চিত না হওয়া যায় তাহলে তার উপর ভর দিয়ে গণিতের যে সমস্ত শাখাগুলি দাঁড়িয়ে আছে তাদের কি গতি হবে?

তৃতীয় আঘাতটি এল 'প্রমাণ' এই ধারণাটিকেই যখন সন্দেহের চোখে দেখা শুরু হয়ে গেল। গাণিতিক প্রমাণ পদ্ধতি, যা শতাব্দীব্যাপী গৃহীত হয়ে এসেছে অত্যন্ত সন্তুষ্ট এবং তর্কাতীত বলে, তাকেও দাঁড়াতে হল কাঠগড়ায়। তাকে প্রশ্ন করা হল কয়েকটি দিক থেকে। যে ন্যায়শাস্ত্র (Logic) সমস্ত প্রমাণের ভিত্তি হিসেবে চলে এসেছে, পুনর্বিন্যাসের পর্যায়ে যে ন্যায়শাস্ত্রকে সম্পূর্ণ rigor-এর উপর দাঁড় করানো হয়েছে বলে বিশ্বাস জেগেছিল, এখন সেই ন্যায়শাস্ত্রের অনেক সূত্রই আক্রান্ত হল; যেমন ইনটুইশনিস্টরা আপত্তি করলেন — — $p \rightarrow p$ সূত্রটিতে। এর অর্থ হচ্ছে কোনো বাক্যের অস্বীকৃতিকে অস্বীকার করলে বাক্যটিকে স্বীকার করা হয়। (প্রসঙ্গতঃ মার্কসবাদ অনুসারে নেগেশন অফ্ নেগেশন থেকে ঠিক মূলে ফিরে আসা হয় না)। ইনটুইশনিস্টদের আপত্তির কারণের বিস্তৃত ব্যাখ্যা এখানে সম্ভব নয়, কিন্তু এই সূত্রের সত্যতা অস্বীকার করলে বর্তমানকালে প্রচলিত গণিতের অনেক প্রমাণিত সিদ্ধান্তই অগ্রাহ্য হয়ে যায়; Cantor-এর তৈরি স্বর্গের বেশ কিছু অংশই ভেঙে পড়ে। এরই অবশ্যম্ভাবী পরিণতি হিসেবে এসে পড়ল গণিতের দর্শনের ontology সংক্রান্ত প্রশ্নটি। 'যে কোনো বহুঘাত সমীকরণের (polynomial equation) অন্তত একটি বীজ আছে', এই কথা থেকে কি বুঝি আমরা। এই 'আছে' বললে কি আমরা অন্তত একটি বীজ প্রকৃতই বার করার কথা বুঝব না কি অন্যান্য সাক্ষ্য প্রমাণ থেকে তার অস্তিত্ব সম্পর্কে নিঃসন্দেহ হলেই চলবে?

'প্রমাণ'-এর বিরুদ্ধে আর একটি মূল আক্রমণ এল Axiom of Choice-এর মতো কয়েকটি নীতিকে কেন্দ্র করে। এই নীতি জ্ঞাত এবং অজ্ঞাতসারে গাণিতিক প্রমাণ পদ্ধতিতে ব্যবহৃত হয়ে এসেছে এবং কেউ সন্দেহ করেনি ইতিপূর্বে। রাসেল যেভাবে ব্যাপারটিকে সহজ করে বলতে চেয়েছেন সেভাবেই বলি। মনে করা যাক কয়েক জোড়া মোজা রয়েছে। প্রত্যেক জোড়া থেকে একটি করে নিয়ে তৈরি একটি মোজার সেট-এর অস্তিত্ব কি সম্ভব? উত্তর হবে অবশ্যই সম্ভব। এটি এতই স্বাভাবিক কথা যে এর কোনো প্রমাণের প্রয়োজন পড়ে না। তাই এই সূত্রটিকে স্বতঃসিদ্ধ বা axiom বলে মেনে নেওয়া হয়েছিল। কিন্তু যদি একটি রোবট-কে বলা হয় ওই সেটটি তৈরি করে দিতে সে কী করবে? সে প্রত্যেক সেটের কাছে যাবে এবং তার পরে? দুটি একই রকম (মোজার যেহেতু ডান, বাঁ নেই) মোজার থেকে কোনটি সে নেবে? রোবটের পক্ষে তো স্বাধীন সিদ্ধান্ত নেওয়া সম্ভব নয়। সে অপেক্ষা করবে পরিচালকের পরবর্তী নির্দেশের

জন্য, কোনটি নেব ? পরিচালকের সমস্যা হল তিনি কোনোভাবেই মোজাগুলোকে চিহ্নিত করে রাখেননি— তাই তাঁর পক্ষেও আর কিছু নির্দেশ দেওয়া সম্ভব নয়। অথচ জুতোর জোড়া হলে তিনি সহজেই বলতে পারতেন বাঁ জুতোটি নাও অথবা ডান জুতোটি। অর্থাৎ বাস্তব ক্ষেত্রে, নির্বাচন করতে গেলেই, শুধুমাত্র নির্বাচনের সেটটি দিলেই চলবে না, নির্বাচনের পদ্ধতিও বলতে হবে। Axiom of choice নির্বাচনের পদ্ধতির কথা না বলেই নির্বাচনের সম্ভাব্যতার কথা বলে। আসলে সে ধরেই নেয় নির্বাচনের পদ্ধতি স্থির করা সবসময়েই সম্ভব হবে।

আপত্তিটা উঠল এইখানে। যাঁরা গণিতের সঙ্গে যুক্ত তাঁরা জানেন এই নীতির কি বিপুল প্রয়োগ করা হয় গণিতের প্রমাণগুলিতে। এই নীতিটিকে শুধু সন্দেহ করেই পর্বটি শেষ হল না, দেখা গেল যে axiom of choice-এর অস্বীকৃতি (negation)-কে গ্রহণ করে এগোলেও কোনো স্ববিরোধ সৃষ্টি হয় না। ঠিক যেমন ইউক্লিডের পঞ্চম স্বতঃসিদ্ধটি অস্বীকার করলেও কোনো স্ববিরোধ হয় না, একটি অন্য জ্যামিতির সৃষ্টি হয় মাত্র। তার অর্থ দাঁড়াল এমন একটি সুন্দর সেট তত্ত্ব তৈরি করা যায় যাতে axiom of choice অস্বীকৃত। Axiom of choice-এর মতোই আর একটি বিতর্কিত নীতি হল Continumm Hypothesis। একইরকমভাবে, একে যদিও এতদিন স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে, দেখা গেল এর অস্বীকৃতিও কোনো স্ববিরোধের জন্ম দেয় না।

একের পরে এক এই ধরনের যুগান্তকারী আবিষ্কারগুলির পরে গণিতের পক্ষে আর এক সামঞ্জস্যমণ্ডিত, অদ্বিতীয় এবং পরম অস্তিত্ব নিয়ে বিরাজমান থাকা সম্ভব রইল না। এক অর্থে এ হল মর্যাদার আসন থেকে চ্যুতি। আবার আর একদিক থেকে দেখলে এ হল বন্ধন মুক্তি।

এই শতকে এখন আমরা এমন একটা পর্যায়ের মধ্য দিয়ে চলেছি যখন ভাবনার ধারা বিচিত্র থেকে বিচিত্রতর পথে বইয়ে দেওয়া সম্ভব। মাথার উপরে কোনো কর্তৃত্ব (authority) নেই। কর্তৃত্ব অর্থে অবশ্যই ব্যক্তিকর্তৃত্ব নয়। গণিতের কোনো ভিত্তিই আজ সংশয়াতীত নয়— এই অর্থে গণিত এখন হতে পারে একটু কর্তৃত্ব মুক্ত এবং তার ফলে খানিকটা নিয়ন্ত্রণহীনও। কেউ কেউ গাণিতিক স্বজ্ঞার (intuition) কথা আবার তুললেও, কোনো মানেই হয় না তাকেই শেষ কর্তৃত্ব বলে স্বীকার করবার। Intuition-এর সমস্যাবলী থেকেই rigoer-এ পদার্পণ করেছিলাম আমরা। Lakatos এ প্রসঙ্গে প্রশ্ন করছেন এইভাবে— 'why then don't we stop earlier, why not say that the ultimate test whether a method is admissible in arithmetic must of course be whether it is intuitively convincing'.

Intuition শুধু গণিত কেন সমস্ত বিজ্ঞানকর্মের মধ্যেই কাজ করে যায়, কিন্তু তা কখনোই নির্ধারক হতে পারে না। অতএব 'প্রমাণে' আমাদের আসতেই হয়। 'Proof is an idol before whom a mathematician tortures himself'—

Eddington-এর এই কথা গণিতের পক্ষে অস্বীকার করা বোধহয় অসম্ভব।

সেট তত্ত্বকে ভিত্তি হিসেবে ধরতে গেলে প্রশ্ন ওঠে কোন সেটতত্ত্ব— Axiom of choice স্বীকার করে না অস্বীকার করে, Continumm Hypothesis স্বীকার করে না অস্বীকার করে? ইত্যাদি। দ্বিতীয় প্রশ্ন উঠবে, যে কোন সেটতত্ত্ব নিয়েই শুরু করি না কেন, সেই তত্ত্ব কি স্ববিরোধের দূষণ-মুক্ত? এর উত্তর হল আমরা জানি না। এখনো কোন বড় রকমের দুর্ঘটনা হয়নি, তবে আশংকা থেকেই যাচ্ছে। এখনকার দিনে গণিতের মূল ধারা এই সেটতত্ত্বকে ভিত্তি করেই চলেছে। এখানে আমার একটি অস্পষ্ট ধারণার উল্লেখ করি। প্রথম দিকে বিরোধিতা পেলেও বর্তমানকালে সেট তত্ত্ব establishment-এর অত্যন্ত প্রিয় তত্ত্ব। এই তত্ত্বের অদ্ভুত ক্ষমতা ও নৈপুণ্যের কথা ছাড়াও দর্শনের দিক থেকেও বর্তমান পৃথিবীর ক্ষমতা কেন্দ্রগুলি এই তত্ত্বকে আদরণীয় মনে করে। যে কোনো গণিতের তত্ত্ব বর্তমানকালে শুরু করা হয় এইভাবে :

একটি সেট নেওয়া হল, যে সেটটি কিছু উপাদান বা element-এর সমষ্টি।

এবারে এই সেটের element-গুলির উপরে একে একে কিছু প্রাথমিক গুণ আরোপিত করা হল, এতে সেটটিও সামগ্রিকভাবে গুণান্বিত হল।

এরপরে মনে করা হল এই গুণারোপিত সেটটি একটি অভিনব ও রহস্যাবৃত বস্তু (object)। এবং সেই সেটটির অন্যান্য গুণাবলী লজিকের নিয়ম মেনে খুঁজে খুঁজে ক্রম অনুসারে theorem হিসেবে লিপিবদ্ধ করা হতে লাগল।

ভাবনার এই সূত্র অনুসরণ করলে উপাদান (element) গুলির সেট নিরপেক্ষ অস্তিত্ব কল্পনা করা সম্ভব। Element-গুলি প্রাথমিক। সমগ্র সেটটির অস্তিত্ব তার পরে। ঠিক যেমনটি আজকাল ভাবা হয় সমাজের ক্ষেত্রেও। সমাজ একটি জনসমষ্টি যার উপাদান ব্যক্তিমানুষ। বিভিন্ন ধরনের আন্তঃসম্পর্কে সম্পর্কিত এই ব্যক্তিমানুষ, এর ফলে সমাজের শরীরে গুণ বিকশিত হয়ে ওঠে, যেমন সমাজটি ধনতান্ত্রিক হয় বা সমাজতান্ত্রিক হয় ইত্যাদি। যে মূল গুণাবলী নিয়ে শুরু করা হয়েছিল তারাই সমস্ত গাণিতিক তত্ত্বটির ক্ষমতাকেন্দ্র, পরবর্তী সময়ে আবিষ্কৃত গুণাবলী, সেই মূল কেন্দ্রেরই ফলশ্রুতি। ধনতান্ত্রিক বা সমাজতান্ত্রিক সমাজ (রাষ্ট্র)—ধারণাতেও কতকগুলি মূল আন্তঃসম্পর্ক ব্যক্তিমানুষের মধ্যে স্বীকৃত হয়। এই আন্তঃসম্পর্কগুলি অত্যন্ত ক্ষমতা সম্পন্ন। এগুলিতে পরিবর্তন ঘটলে তাকে বলা হয় একটি অন্য সমাজ (রাষ্ট্র)। সমাজের এই ধারণার সঙ্গে বর্তমানকালের গণিত তত্ত্বের যে সাদৃশ্যের কথা আমার মনে আসে তা হল, ব্যক্তিকে প্রাথমিক উপাদান হিসেবে দেখা, ব্যক্তির মধ্যেকার আন্তঃসম্পর্ক দিয়ে সমাজের গুণ নির্ধারণের ধারণা এবং শক্তিশালী কেন্দ্রের ধারণার মধ্যে।

মূল কথায় ফিরে আসি। সেট তত্ত্বকে ভিত্তি হিসাবে মেনে নেবার সমস্যাগুলি কিছুটা বলা হল।

এবারে লজিক। আমরা দেখেছি যে লজিককে নিয়ে অর্থাৎ গণিতের প্রমাণ পদ্ধতি

নিয়ে উদ্ভূত সমস্যা কতটা গভীর। যে প্রামাণ্যতার দেবতার সামনে গণিতবিদ নিজেকে নিগৃহীত করতে থাকেন, সেই দেবতার বেদীতেই ফাটল দেখা গেছে। কিছু কিছু প্রমাণিত সত্য intuitively সত্য বলে প্রতিভাত হচ্ছে না, এবং কিছু কিছু intuitively সত্য বিষয় গাণিতিক পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ বা অপ্রমাণ কোনটাই করা যাচ্ছে না।

তাই কোন idol নেই আর আজকে। প্রকৃতপক্ষে গণিতকে একটিই প্রোতস্বিনী বলা বোধহয় আর সম্ভব নয়, এখন সে বহুধাবিভক্ত। Kline বলছেন এইভাবে: "The major fact that emerges from the several conflicting approaches to mathematics is that there is no one body of mathematics but many.' Von Neumann লক্ষণটি দেখে সাবধানবাণী উচ্চারণ করেছেন ১৯৪৭-এ— 'there is a danger that the subject will develop along the time of least resistance, that the stream so far from its source will seperate into a multitude of insignificant branches.' Von Neumann অবশ্য প্রতিকার হিসেবে গণিতকে তার উৎসে অর্থাৎ 'প্রকৃতিতে' ফিরতে বলেছেন!

Von Neumann-এর মতো মনীষা ঠিকই দেখেছিলেন। কিন্তু তাঁর আশঙ্কার মূল কারণটি খুঁজতে গিয়ে অন্য একটি কথা উত্থাপন করা হয়ত অযৌক্তিক হবে না। ভাল এবং মন্দ, গুরুত্বপূর্ণ এবং অগভীর, সমস্ত ধরনের ক্রিয়াকর্মের মধ্যেই মানুষ জীবন কাটায়। অগভীর, কম তাৎপর্যপূর্ণ বা তাৎপর্যহীন গবেষণার কাজ কেউ করে সাধারণত তখনই যখন কোন একটা বাইরের চাপ তার উপর ক্রিয়াশীল থাকে (Publish or perish)। এই চাপটা আসে শেষ বিচারে ক্ষমতার কেন্দ্র থেকে। গবেষণাকর্মীর দায়বদ্ধতা মূলত নিজের কাছে ও বিষয়ের কাছে। তার বাইরে, দ্বিতীয় স্তরে ঠিক দায়বদ্ধতা নয়, একটা প্রশংসিত হবার বা স্বীকৃতি লাভের ইচ্ছে গবেষকের মধ্যে অবশ্যই কাজ করে। তার Community, রসিকজন বলছে যাঃ বেশ তো হয়েছে। এটা এখনকার পুরস্কার প্রদান প্রক্রিয়ার সঙ্গে মূলগত ভাবে ভিন্ন। প্রথমটিতে একান্ত আনন্দ, আর দ্বিতীয়টিতে সোচ্চার ঘোষণা। প্রথমটিতে শুধুই appreciation আছে, দ্বিতীয়টিতে appreciation হয়ত থাকে, কিন্তু সেইসঙ্গে থাকে একটি authority। এই প্রক্রিয়া গবেষকের মধ্যেও অহংবোধের জন্ম দেয় এবং একটা পর্যায়ে authority গবেষককে তার অংশভুক্ত করে ফেলে। তাই যে যেমন খুশি এবং যখন খুশি ভাবতে আর বলতে পারার পরিবেশই গবেষণা, বা সৃষ্টিধর্মী যে কোন কাজের পূর্বশর্ত। ধরেই নেওয়া যেতে পারে এইসব কর্মপ্রকল্পের নব্বই শতাংশই হবে কম তাৎপর্যসমন্বিত, সময় তার দায়িত্ব নেবে। কিন্তু শর্তমুক্ত, অতি দ্রুত গবেষণায় ফললাভের শর্তমুক্ত, এমনকি ফললাভ করতেই হবে এই শর্তমুক্ত বাতাবরণই আমাদের কাম্য ('জ্ঞান যেথা মুক্ত')।

দু-টি বিষয়ের অবতারণা করে এই প্রবন্ধের ইতি টানছি।

১. গণিতের জগৎ থেকে এতদিন পরিবর্তনীয়তা (variability) এবং অস্পষ্টতা (vagueness) নির্বাসিত ছিল। এ ব্যাপারগুলিকে একটু খাটো করেই দেখা হত এতদিন। এখন আবার এই ধারণাগুলির গুরুত্ব অনুভূত হচ্ছে। যে সমস্ত শিরোনামায় এগুলি আলোচিত হচ্ছে তার কয়েকটি হল—

Sheaf Theory (1949)
Probabilistic Metric Space (1951)
Non-Standard Analysis (1961)
Kripke Model (1965)
Fuzzy Sets (1965)
Elementary Topoi (1969)
Internal Set Theory (1977)
Alternative Set Theory (1979)

এখনো এই ভাবনাগুলি রক্ষণশীল ক্ষমতাসীনদের কাছে গৃহীত হচ্ছে না। আমার মনে হয় গৃহীত না হলেই শুভ। এরই সাথে সাথে তৈরি হচ্ছে নানা ধরনের লজিক। খুব আশ্চর্যজনকভাবে এই নতুন ভাবনার জগতে অনেক সময়েই মূল অবদান এসেছে কম্প্যুটার টেকনলজির ব্যক্তিবর্গের কাছ থেকে। কোন সন্দেহই নেই এই টেকনলজি একেবারে সরাসরি ক্ষমতার কেন্দ্রের সঙ্গে যুক্ত। কাজেই সতর্ক থাকতেই হবে ক্ষমতার এই উৎসাহের কারণ সম্পর্কে।

২. মনে হচ্ছে গণিতের ক্ষেত্রে প্লেটোর দিন শেষ হতে চলেছে। কোন নির্দিষ্ট একক গাণিতজগতের অস্তিত্ব স্বীকার করা এবং সেই জগতের সত্যগুলি আবিষ্কারের জন্য সচেষ্ট হওয়া, এখন আর সম্ভব নয়। এখন বরং স্বাভাবিক মনে হয়, কোন গণিত আমার পছন্দ হয়, কোন লজিক আমি প্রয়োগ করব, কোন সেটতত্ত্ব আমি ভিত্তি হিসেবে নেব, এই বহুত্বধর্মী মনোভাব (approach) গ্রহণ। ব্যক্তির পছন্দ-অপছন্দ নির্ভর হলেই বিষয়টি হয়ে পড়ছে সংস্কৃতি-নির্ভর। গণিত কি ব্যক্তিমানুষের সংস্কৃতি-নির্ভর সামাজিক ক্রিয়া হতে যাচ্ছে আগামী দিনে? Wittgenstein বলেছেন, একটি সমগ্র জাতির রীতিনীতি, অভ্যাস এবং আচরণের উপর গণিতের বেড়ে ওঠা নির্ভর করে। সমগ্র জাতি বলতে সমগ্র মানবজাতির কথা স্পষ্ট করে বলা নেই কোথাও। তা যদি হয় তাহলে সংস্কৃতি-নির্ভর ভিন্ন ভিন্ন গণিত সৃষ্টি কি সম্ভব? যেমন ভিন্ন ভিন্ন সংগীত, বা সাহিত্য বা যে কোন শিল্প? ইতিমধ্যে কেউ কেউ সমস্ত পৃথিবীতে একই গণিত শিক্ষণের মধ্যে পশ্চিমের দেশগুলির সাংস্কৃতিক-সাম্রাজ্যবাদী লক্ষণের প্রকাশ দেখতে পাচ্ছেন। মনে করছেন বর্তমান গণিত শিক্ষার সঙ্গে সঙ্গে একটি মূল্যবোধও অনুপ্রবিষ্ট করা হচ্ছে। এই মূল্যবোধগুলি হল rationalism, objectivism এবং power ও control-এর মনোভাব সৃষ্টি। এবং এগুলি মূলত ইয়োরোপের মাটিতে জন্মগ্রহণ

করেছিল। অন্তত একথা বলা যায়, সমস্ত সংস্কৃতিতেই একই ধরনের rationalism ইত্যাদি তৈরি হয়নি।

আমি এই প্রসঙ্গগুলি সম্পর্কে কোন চূড়ান্ত মতামত দিতে পারব না এই মুহূর্তে। তবে এখনকার বিজ্ঞানের গতিপ্রকৃতি ও সামাজিক, রাজনৈতিক প্রেক্ষাপটের দিকে চেয়ে মনে হচ্ছে প্রসঙ্গগুলি আর অবহেলার যোগ্য নয়। □

সহায়ক রচনাপঞ্জি :

Mathematics, the Loss of Certainty, M. Kline, Oxford University Press, 1980.
Quantum Probabiliy—Quantum Logic, I. Pitowsky, Springer Verlag, 1989.
Proofs and Refutations, I. Lakatos, Cambridge University Press, 1975.
A Mathematician's Apology, G. H. Hardy, Cambridge University Press.
Western Mathematics: The Secret Weapon of Cultural Imperialism, A. J. Bishop, Race & Class, 32(2), 1990.
Foundations of Fuzzy Sets: A Non-Standard Approach, C. A. Drossos, F. S. S. 37, 1990.